

文章编号: 1000-8055(2007)09-1532-05

不完全概率信息的压杆稳定可靠性鲁棒设计

贺向东^{1,2}, 张义民², 闻邦椿²

(1. 大连工业大学 机械工程与自动化学院, 大连 116034;
2. 东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110004)

摘 要: 将可靠性设计理论和鲁棒设计方法相结合, 讨论了不完全概率信息的压杆稳定可靠性鲁棒设计问题, 提出了稳定可靠性鲁棒设计的计算方法. 把可靠性灵敏度融入可靠性优化设计模型之中, 将稳定可靠性鲁棒设计归结为满足可靠性要求的多目标优化问题. 在基本随机参数的前四阶矩已知的情况下, 通过计算机程序可以实现不完全概率信息的压杆稳定可靠性鲁棒设计, 迅速准确地得到不完全概率信息的压杆稳定可靠性鲁棒设计信息.

关 键 词: 压杆; 不完全概率信息; 稳定可靠性灵敏度; 稳定可靠性优化设计; 鲁棒设计
中图分类号: TU318; TB114.3 **文献标识码:** A

Reliability-robust design of compressive bar under incomplete probability information

HE Xiang-dong^{1,2}, ZHANG Yi-min², WEN Bang-chun²

(1. College of Mechanical Engineering and Automation,
Dalian Polytechnic University, Dalian 116034, China;
2. College of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: Based on the reliability design theory and the robust design method, the reliability-based robust design of compressive bar under incomplete probability information was extensively discussed, and a numerical method for stable reliability-based robust design was proposed. The reliability sensitivity was added to the reliability-based optimization design model, while the stable reliability-based robust design was described as a multi-objective optimization. If first four moments of basic random variables have already been known, the computer program can be used to obtain accurately and quickly the stable reliability-based robust design information of compressive bar under incomplete probability information.

Key words: compressive bar; incomplete probability information;
stable reliability sensitivity; stable reliability optimization; robust design

由于设计参数和结构参数的不确定, 在当前的机械结构设计中常常将几何参数、材料特性和载荷等作为不确定来处理. 可靠性设计理论和鲁

棒设计方法是非常先进的设计思想, 由于这些方法对于提高产品质量和保持产品性能的稳定性方面具有非常重要的作用, 因此具有广阔的应用前

收稿日期: 2006-09-12; 修订日期: 2007-03-06

基金项目: 国家自然科学基金(50535010); 中国博士后基金(2005038593); 辽宁省自然科学基金(20052034)

作者简介: 贺向东(1971-), 男, 吉林松原人, 大连工业大学机械工程与自动化学院副教授, 东北大学机械工程与自动化学院博士后, 博士, 主要从事机械可靠性优化设计、可靠性稳健设计等方面的研究.

景. 现在可靠性(优化) 设计^[1-3]、可靠性灵敏度技术^[4-6]和鲁棒设计^[7-8]在理论上和方法上都达到了一定的水平, 并在应用中取得了一定的经济效益. 任何一种工程结构, 其可靠性都会受到一些因素影响, 要么尽可能消除这些因素, 要么尽量降低这些因素的影响. 在实际工程中, 实现消除这些影响因素往往是很难的, 即使能够消除也需要花费很大的代价, 可见这不是首选的方法; 而降低这些因素的影响却是相对容易和代价低的方法, 也就是使工程结构的可靠性对这些因素的变化不十分敏感, 根据这种指导思想, 发展一种可以提高工程结构安全可靠性和鲁棒稳健性的工程设计方法是十分必要的.

目前, 机械结构的可靠性鲁棒设计方法^[9-10]已有所研究, 这种研究假定设计变量和设计参数服从正态分布. 然而由于工程实际的复杂性和统计数据的相对缺乏, 使得设计变量和设计参数的分布概型很多, 各种设计参数服从多种形式的概率分布, 有些完全不服从正态分布, 可见单纯使用正态分布的可靠性鲁棒设计方法会带来一定的误差, 甚至有时得不到理想的设计结果. 对于随机变量服从非正态分布的可靠性灵敏度设计问题, 人们大多采用两种方法来处理. 一种方法是 Rosenblatt 变换方法^[11]. 另一种方法是 Rackwitz 和 Fiessler 提出的当量正态转化法^[12], 可把非正态随机变量变换为等价的正态随机变量. 以上两种方法在将非正态随机变量转化为正态随机变量时, 需要知道随机变量的概率分布函数(CDF) 或概率密度函数(PDF). 在实际工程中, 由于统计数据的缺乏, 使得有些随机变量的 CDF/ PDF 是未知的, 而仅仅可以用统计的方法来求得前几阶矩. 在这种情况下, 用以上两种方法就无法将非正态随机变量转化为正态随机变量.

另外, 当前对可靠性鲁棒设计方法的研究, 还仅仅是对结构强度可靠性鲁棒设计方面的研究工作^[9-10], 但有一些工程结构具有足够的强度、刚度, 却不一定能安全可靠地工作, 而稳定破坏则是其主要失效模式. 因此, 将稳定可靠性理论和鲁棒设计方法相结合, 对稳定可靠性鲁棒计方法进行深入研究不仅具有重要的理论价值, 而且也具有十分重要的工程实际意义. 本文结合可靠性设计理论和鲁棒设计方法, 采用随机摄动方法、Edgeworth 级数方法及相应的经验修正公式, 提出了不完全概率信息的压杆稳定可靠性鲁棒设计方法, 讨论了压杆的稳定可靠度对设计参数的变化

是否敏感的问题, 发展了不完全概率信息的压杆稳定可靠性鲁棒设计理论.

1 可靠性设计

可靠性设计的一个目标是计算可靠度

$$R = \int_{g(\mathbf{X}) > 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \tag{1}$$

式中 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ 为基本随机参数向量 $\mathbf{X} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^T$ 的联合概率密度, 这些随机参数代表载荷、零部件的特性等随机量. $g(\mathbf{X})$ 为状态函数, 可表示零部件的两种状态

$$\left. \begin{aligned} g(\mathbf{X}) \leqslant 0 & \text{ 为失效状态} \\ g(\mathbf{X}) > 0 & \text{ 为安全状态} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

根据可靠性的干涉理论, 结构的稳定破坏问题可以定义为结构的轴向载荷超过了不使结构失稳的临界力, 那么结构稳定可靠性分析中的状态函数 $g(\mathbf{X})$ 方程可以写成

$$g(\mathbf{X}) = F_{cr} - F \tag{3}$$

式中 F 为结构的轴向载荷, F_{cr} 为不使结构失稳的临界力.

把随机参数向量 $\mathbf{X}$ 和状态函数 $g(\mathbf{X})$ 表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_d + \varepsilon \mathbf{X}_p \tag{4}$$

$$g(\mathbf{X}) = g_d(\mathbf{X}) + \varepsilon g_p(\mathbf{X}) \tag{5}$$

这里 ε 为一小参数, 下标为 d 的部分表示随机参数中的确定部分, 下标为 p 的部分表示随机参数中的随机部分, 且具有零均值. 显然这里要求随机部分要比确定部分小得多. 对上面两式取均值、方差、三阶矩和四阶矩, 有

$$\mu_g = E[g(\mathbf{X})] = \bar{g} = g_d(\mathbf{X}) \tag{6}$$

$$\sigma_g^2 = \text{Var}[g(\mathbf{X})] = \left\{ \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right\}^{[2]} \text{Var}(\mathbf{X}) \tag{7}$$

$$\theta_g = C3[g(\mathbf{X})] = \left\{ \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right\}^{[3]} C3(\mathbf{X}) \tag{8}$$

$$\eta_g = C4[g(\mathbf{X})] = \left\{ \frac{\partial g_d(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^T} \right\}^{[4]} C4(\mathbf{X}) \tag{9}$$

式中 $\text{Var}(\mathbf{X})$, $C3(\mathbf{X})$, $C4(\mathbf{X})$ 为基本随机参数的方差、三阶矩和四阶矩向量. $(\cdot)^{[kj]} = (\cdot)^{[k-1]} \odot (\cdot) = (\cdot) \odot (\cdot) \odot \dots \odot (\cdot)$ 为 $(\cdot)$ 的 Kronecker 幂, 符号 $\odot$ 代表 Kronecker 积, 定义为 $(\mathbf{A})_{p \times q} \odot (\mathbf{B})_{s \times t} = [a_{ij} b_{kl}]_{ps \times qt}$.

可靠性指标定义为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{E[g(\mathbf{X})]}{\sqrt{\text{Var}[g(\mathbf{X})]}} \tag{10}$$

在基本随机参数向量 $\mathbf{X}$ 服从正态分布时, 可以获得可靠度的一阶估计量

$$R = \Phi(\beta) \tag{11}$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

根据 Edgeworth 级数方法, 可以把服从任意分布的标准化了的随机变量的概率分布函数近似地展开成为标准正态分布函数, 即

$$F(y) = \Phi(y) - \varphi(y) \left[\frac{1}{6} \frac{\theta_k}{\sigma_g^3} H_2(y) + \frac{1}{24} \left(\frac{\eta_k}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_3(y) + \frac{1}{72} \left(\frac{\theta_k}{\sigma_g^3} \right)^2 H_5(y) + \dots \right] \quad (12)$$

$H_j(y)$ 为 j 阶 Hermite 多项式, 其递推关系为

$$\begin{cases} H_{j+1}(y) = yH_j(y) - jH_{j-1}(y) \\ H_0(y) = 1, H_1(y) = y \end{cases} \quad (13)$$

据此结构件的可靠度为

$$R(\beta) = P[g(X) > 0] = 1 - F(-\beta) \quad (14)$$

Edgeworth 级数^[13]可以任意精确地逼近随机参数的真实分布, 但通常取级数的前四项即可得到较好的近似. 用上式计算可靠度时, 有时会出现 $R > 1$ 的情况. 根据计算实践表明, 当有 $R > 1$ 情况出现时, 采用下述经验修正公式^[3]要比使用 Edgeworth 级数所获得的计算结果更接近于 Monte Carlo 数值模拟结果, 当没有 $R > 1$ 情况出现时, Edgeworth 级数可以获得足够精确的解.

$$R^*(\beta) = R(\beta) - \frac{R(\beta) - \Phi(\beta)}{\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\}^\beta} \quad (15)$$

2 稳定可靠性灵敏度设计

结构的稳定可靠度对基本随机参数向量 X 均值和方差的灵敏度为

$$\frac{DR}{D\bar{X}^T} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial \bar{X}^T} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^*}{\partial \beta} &= \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} + \left[\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} - \varphi(\beta) \right] \frac{\beta(\beta-1)[R(\beta) - \Phi(\beta)] - 1}{\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\}^{\beta+1}} + \\ &\frac{[R(\beta) - \Phi(\beta)](\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\} \ln \{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\} + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta)}{\{1 + [R(\beta) - \Phi(\beta)]\beta\}^{\beta+1}} \end{aligned} \quad (23)$$

3 稳定可靠性鲁棒设计

结构稳定可靠性鲁棒设计问题可以用如下的数学模型来表示, 即

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X) = \sum_{k=1}^n w_k f_k(\bar{X}) \\ \text{s.t.} \quad & R - R_0 \geq 0, q_i(\bar{X}) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, l) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{DR}{DV\ar(X)} = \left[\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} + \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} \right] \frac{\partial \sigma_g}{\partial V\ar(X)} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} &= \varphi(-\beta) \left\{ 1 - \beta \left[\frac{1}{6} \frac{\theta_k}{\sigma_g^3} H_2(-\beta) + \frac{1}{24} \left(\frac{\eta_k}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_3(-\beta) + \frac{1}{72} \left(\frac{\theta_k}{\sigma_g^3} \right)^2 H_5(-\beta) \right] - \right. \\ &\left. \left[\frac{1}{3} \frac{\theta_k}{\sigma_g^3} H_1(-\beta) + \frac{1}{8} \left(\frac{\eta_k}{\sigma_g^4} - 3 \right) H_2(-\beta) + \frac{5}{72} \left(\frac{\theta_k}{\sigma_g^3} \right) H_4(-\beta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g} = \frac{1}{q} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} = - \frac{\mu_g}{\sigma_g^2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\beta)}{\partial \sigma_g} &= \varphi(-\beta) \left[\frac{1}{2} \frac{\theta_k}{\sigma_g^3} H_2(-\beta) + \frac{1}{6} \frac{\eta_k}{\sigma_g^4} H_3(-\beta) + \frac{1}{12} \frac{\theta_k^2}{\sigma_g^6} H_5(-\beta) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial V\ar(X)} = \frac{1}{2\sigma_g} \left[\frac{\partial g}{\partial \bar{X}} \otimes \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{X}} \right] \quad (22)$$

把已知条件和可靠性分析的计算结果代入公式(16)和(17), 就可以获得可靠性灵敏度 $DR/D\bar{X}^T$ 和 $DR/DV\ar(X)$.

当用 Edgeworth 级数估算构件的可靠度出现 $R > 1$ 的情况时, 根据计算实践表明, 采用经验修正公式(15)要比使用 Edgeworth 级数所获得的计算结果更接近于 Monte Carlo 数值模拟结果, 而所得的分布函数曲线也是在 $[0, 1]$ 范围内单调的. 可见, 当 $R > 1$ 时, 应用经验修正公式的导数来替换公式(16)和(17)中的 $\partial R(\beta)/\partial \beta$ 会比直接使用公式(16)和(17)所获得的结果更加精确. 当有 $R > 1$ 情况出现时, 对可靠性指标 β 的灵敏度为

式中 w_k 为分目标函数 $f_k(\bar{X})$ 的加权因子, $w_k \geq 0$, 其值决定于各目标函数的数量级及重要程度, 本文采用的是加权组合法中的像集法^[1]来确定加权因子 w_k . 取两个分目标函数, 其一 $f_1(\bar{X})$ 为结构的重量, 其二 $f_2(\bar{X})$ 为结构的稳定可靠度对设计参数向量 $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ 均值的灵敏度的平方和然后再开方. R_0 为给定应满足要求的可靠度, $q_i(\bar{X})$ 为不等式约束.

4 数值算例

图 1 所示为承受轴向载荷的空心压杆的计算简图^[1-2]. 基本随机变量向量 $\mathbf{X} = [E \ d \ t \ L \ F]^T$, 其中 E, d, t, L, F 分别表示弹性模量、压杆截面中径、截面厚度、压杆的长度和载荷力. 载荷 F 是服从任意分布的随机变量, 其前四阶矩为 $(F) = (4.499\ 7 \times 10^3 \text{ N}, 4.512\ 7 \times 10^2 \text{ N}, 1.046\ 9 \times 10^8 \text{ N}^3, 2.238\ 7 \times 10^{11} \text{ N}^4)$; 其他随机变量均服从正态分布, 其均值和标准差分别为 $(E) = (203\ 000, 5\ 860) \text{ MPa}, (L) = (2\ 500, 12.5) \text{ mm}$. 设所要求的可靠度 $R_0 = 0.999$, 试用稳定可靠性鲁棒设计方法设计此压杆的截面的几何尺寸 d 和 t .

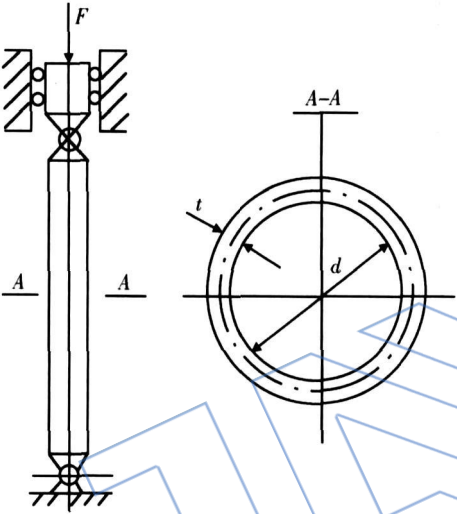


图 1 压杆结构
Fig. 1 Structure of compressive bar

首先, 建立目标函数:

(1) 要求压杆的重量最轻, 即求截面 A 的面积最小 $f_1(\mathbf{x})$; (2) 要求压杆的可靠度对设计变量 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ 均值的灵敏度为最小 $f_2(\mathbf{x})$, 分别为

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1 x_2, \\ f_2(\mathbf{x}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial R}{\partial x_i} \right)^2} \end{aligned} \tag{25}$$

取设计变量为

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [d \ t]^T$$

第二, 建立约束条件: 约束条件为

$$\begin{aligned} R - R_0 &\geq 0, \quad 20 \leq x_1 \leq 80, \\ 3 &\leq x_2 \leq 8 \end{aligned} \tag{26}$$

第三, 优化求解: 选取初值 $d = 23.5 \text{ mm}, t = 4 \text{ mm}$, 求得压杆设计处截面的最小尺寸为 $d = 26.993\ 25 \text{ mm}, t = 3.000\ 428 \text{ mm}$. 依据此可靠性鲁棒设计的结果, 计算得此压

杆的可靠性指标、可靠度和可靠性灵敏度以及可靠度的相对误差分别为

$$\begin{aligned} \beta &= 5.870\ 907, \quad R_E = 0.999\ 999\ 3, \\ R_{MCS} &= 0.999\ 9 \\ DR/D\mathbf{x}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial d} & \frac{\partial R}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.034 \times 10^{-6} \\ 1.559 \times 10^{-5} \end{bmatrix}^T \\ \varepsilon_R &= \left| \frac{R^* - R_{MCS}}{R_{MCS}} \right| = \\ &= \left| \frac{0.999\ 999\ 3 - 0.999\ 9}{0.999\ 9} \right| = 0.009\ 93\% \end{aligned}$$

这里 R_E 是用 Edgeworth 级数计算得到的可靠度, R^* 是用经验修正公式计算得到的可靠度, R_{MCS} 是用 Monte Carlo 模拟技术计算得到的可靠度, ε_R 是可靠度的相对误差.

从以上计算结果可以看出压杆的可靠性指标 β 和可靠度 $R = \Phi(\beta)$ 愈大, R 随 β 变化愈平缓, 其可靠性灵敏度的数量值愈小, 即斜率愈低, 也就是说设计参数的变化对压杆的可靠性影响愈不敏感, 即愈稳健.

5 结 论

本文提出了一种计算压杆稳定可靠性鲁棒设计的数值方法, 建立了压杆稳定可靠性鲁棒设计的数学模型. 本数值方法在随机参数前四阶矩已知的情况下, 放松了对随机参数的分布概型的限制, 使之更接近于工程实际中的结构可靠性问题. 数值算例表明该方法是解决不完全概率信息的工程结构件稳定可靠性鲁棒设计问题的一种实用有效的数值方法.

参考文献:

[1] 刘善维. 机械零件的可靠性优化设计[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1993.
[2] 张义民. 汽车零部件可靠性设计[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2000.
[3] Zhang Y M, Wen B C, Liu Q L. First passage of uncertain single degree of freedom nonlinear oscillators[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 165(4): 223-231.
[4] Bjerager P, Krenk S. Parametric sensitivity in first order reliability analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1989, 115(7): 1577-1582.
[5] Wu Y T. Computational method for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1717-1723.
[6] 张义民, 王龙山. 发动机连杆的可靠性灵敏度设计[J]. 航空动力学报, 2004, 19(5): 587-592.

ZHANG Yimin, WANG Longshan. Reliability sensitivity design of engine connecting rod[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(5) : 587-592.

[7] 陈立周. 稳健设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.

[8] Robinson T J, Borror C M. Robust parameter design: A review[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2004, 20(1) : 81-101.

[9] 贺向东, 张义民, 刘巧伶. 整体法兰的可靠性稳健优化设计[J]. 机械强度, 2004, 26(6) : 666-669.

HE Xiangdong, ZHANG Yimin, LIU Qiaoling. Reliability-based robust optimization design for banjo flange[J]. Journal of Mechanical Strength, 2004, 26(6) : 666-669.

[10] ZHANG Y M, HE X D, LIU Q L, et al. An approach of robust reliability design for mechanical components[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part E, Journal of Process Mechanical Engineering, 2005, 219(3) : 275-283.

[11] Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1952, 23(2) : 470-472.

[12] Rackwitz R, Fiessler B. Structural reliability under combined random load sequences[J]. Computer & Structure, 1978, 9(5) : 489-494.

[13] Cramer H. Mathematical methods of statistics[M]. N J: Princeton University Press, 1964.

